

Dorin Andrica

Dorel Duca

Gheorghe Lobonț

**Concursul interjudetean
de MATEMATICĂ
„Marian Țarină”**

**Volumul II
(2011-2019)**

Editura Paralela 45

Design copertă: Marius Badea
Pregătire de tipar: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ANDRICA, DORIN

**Concursul interjudețean de matematică „Marian
Țarină”** / Dorin Andrica, Dorel Duca, Gheorghe Lobonț. -
Pitești : Paralela 45, 2023

2 vol.

ISBN 978-973-47-3848-9

Vol. 2 : (2011-2019). - 2023. - ISBN 978-973-47-3850-2

I. Duca, Dorel

II. Lobonț, Gheorghe

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2023

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Cuprins

I	Enunțuri 2011-2019	9	
	Capitolul 1	Enunțuri	11
	1.1	Ediția a XI-a (6-7 mai 2011)	11
	1.2	Ediția a XII-a (11-12 mai 2012)	17
	1.3	Ediția a XIII-a (10-11 mai 2013)	24
	1.4	Ediția a XIV-a (16-17 mai 2014)	30
	1.5	Ediția a XV-a (8-9 mai 2015)	36
	1.6	Ediția a XVI-a (25-26 mai 2016)	42
	1.7	Ediția a XVII-a (7-8 aprilie 2017)	49
	1.8	Ediția a XVIII-a (30-31 martie 2018)	55
	1.9	Ediția a XIX-a (29-30 martie 2019)	61
II	Soluții 2011-2019	69	
	Capitolul 2	Soluții	71
	2.1	Ediția a XI-a (6-7 mai 2011)	71
	2.2	Ediția a XII-a (11-12 mai 2012)	90
	2.3	Ediția a XIII-a (10-11 mai 2013)	108
	2.4	Ediția a XIV-a (16-17 mai 2014)	129
	2.5	Ediția a XV-a (8-9 mai 2015)	150
	2.6	Ediția a XVI-a (25-26 mai 2016)	176
	2.7	Ediția a XVII-a (7-8 aprilie 2017)	203
	2.8	Ediția a XVIII-a (30-31 martie 2018)	232
	2.9	Ediția a XIX-a (29-30 martie 2019)	256

Cuvânt înainte

Dacă științele matematice sunt o piramidă de stilizări, a face matematică înseamnă a învăța stilizarea (modelarea) situațiilor concrete și a operațiilor efectuate asupra lor. Matematica este o școală a rigorii. Profesorii văd fondul vocației lor în faptul că învățarea matematicii are semnificație pentru ei în măsura în care contribuie la dezvoltarea intelectuală a elevilor. Ei formează inteligențe în sensul propriu al termenului, le dau o structură, atunci când ea nu este decât virtuală, îi învață să gândească riguros și să își utilizeze propriile capacități.

Concursurile de matematică, dar nu numai de matematică, au în primul rând rolul de socializare. Elevul care participă la un concurs întâlnește colegi din alte clase, de la alte școli, din alte localități, din alte țări și cunoaște alți profesori. Profesorul care merge cu elevii la un concurs cunoaște alți elevi, se întâlnește sau se reîntâlnește cu alți colegi și, de ce nu, cu unii din profesorii lui... Pe de altă parte, concursurilor au rolul de a răspunde unei necesități sufletești a candidaților: Care este nivelul meu de pregătire în comparație cu colegii mei?

Urmărind aceste idei, prof. Mariana Ursu și prof. Gheorghe Lobonț, au inițiat în anul 2001, la Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Turda, Concursul Interjudețean de Matematică „Marian Țarină”. Numele concursului este dat de Marian Țarină (1932-1992), fost elev al liceului „Regele Ferdinand”, actualmente Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Turda. Acesta a fost unul dintre marii profesori de la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca, cu multiple preocupări legate de matematica de nivel preuniversitar și colaborator la Gazeta Matematică. În primul an concursul a avut loc iarna și s-a adresat doar elevilor de liceu. Din anul următor a fost extins și la clasele de gimnaziu și s-a desfășurat în luna mai, după etapa națională a Olimpiadei de Matematică. Observând că după etapa națională a olimpiadelor interesul elevilor pentru concursuri scade, în ultimii ani concursul s-a desfășurat înaintea Olimpiadei Naționale de Matematică. Începând cu anul 2007 concursul a fost extins și pentru elevii claselor a IV-a.

Toate cele 19 ediții de până acum s-au desfășurat la Colegiul Național „Mihai Viteazul” din Turda sub atenta îndrumare a directorilor: prof. Mariana Ursu, prof. Gheorghe Lobonț, prof. Alexandra Zamfir. Încă de la început concursul s-a bucurat de un sprijin substanțial din partea unor cadre didactice de la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca, în ceea ce privește întocmirea subiectelor și coordonarea corecturii lucrărilor participanților. Președintele tuturor edițiilor a fost prof. univ. dr. Dorel I. Duca.

Problemele propuse la cele 19 ediții sunt conținute în prezentele două volume. Primul volum acoperă perioada 2001-2010 iar al doilea perioada 2011-2019, împreună conținând 640 probleme cu grad ridicat de dificultate însoțite de rezolvări complete. Ne exprimăm speranța că această lucrare este utilă atât elevilor cât și profesorilor în procesul de pregătire pentru concursurile de matematică.

Capitolul 1

Enunțuri

1.1 Ediția a XI-a (6-7 mai 2011)

Clasa a IV-a

1. Aflați diferența dintre numerele naturale a și b știind că ele verifică egalitățile

$$[(4 + a : 3) : 12 + 5] \cdot 4 - 26 = 42$$

$$[(b + 7) : 25 - 8] \cdot 8 + 5 = 37.$$

Gheorghe Lobonț

2. Suma a două numere naturale este 225. Dacă pe primul număr îl înmulțim cu 2, iar pe al doilea îl împărțim la 2, obținem numere egale. Care sunt numerele?

Eugenia Miron

3. În urmă cu 7 ani, suma vârstelor fraților Mariei era de 9 ani. Acum suma vârstelor fraților ei este 37 ani. Câți frați are Maria?

Ioan Groza

4. La concursul de matematică și informatică „Marian Țarină”, ediția a X-a, au participat 272 elevi, dintre care 258 au rezolvat prima problemă, 250 au rezolvat a doua problemă, 163 au rezolvat a treia problemă și 149 au rezolvat a patra problemă. Arătați că cel puțin patru elevi au rezolvat toate problemele.

Vasile Șerdean

Clasa a V-a

1. Determinați toate numerele naturale \overline{abcd} cu proprietatea că

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 36 \quad \text{și} \quad \overline{dc} + \overline{cd} = 33.$$

Monica Fodor

2. Fie numărul $A = 919929999399994 \dots 999 \dots 92006$.

- Calculați suma cifrelor numărului A .
- Care este cifra de pe locul 108?
- Determinați câte cifre de 9 conține numărul A .

Ioan Groza, Cristian Pop

3. Suma a trei numere naturale este 349. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 4 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 7 și restul 4. Să se afle numerele.

Gheorghe Lobonț, Lucia Iepure

4. Se consideră 10 numere naturale nenule (nu neapărat diferite) și calculăm toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere și obținem: 83, 84, 85, ..., 90, 91 (sumele care se repetă le scriem o singură dată). Aflați cele 10 numere.

Vasile Șerdean

Clasa a VI-a

1. Fie x, y, z trei numere întregi pozitive cu proprietatea că primele două sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar ultimele două sunt invers proporționale cu $1/2$ și $1/5$. Studiați dacă produsul lor este cub perfect, când suma numerelor este 100.

Monica Fodor, Ancuța Nechita

2. a) Fie

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2011}, \\y &= 1 + 3 + 3^3 + \dots + 3^{2011}, \\z &= 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2011}.\end{aligned}$$

Scrieți în ordine crescătoare numerele $9z + 1$, $(2y + 1)^2$ și $(x + 1)^3$.

b) Să se arate că fracția $\frac{5c + 8}{3c + 5}$ este ireductibilă oricare ar fi $c \in \mathbb{N}$.

Vasile Șerdean, Monica Fodor

3. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine), astfel încât $(AB) = (CB) = (CD)$. Fie E un punct exterior dreptei d , astfel încât $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$. În triunghiul EDA se construiesc medianele (AF) ($F \in (ED)$) și (DP) ($P \in (AE)$). Să se arate că:

- E aparține mediatoarei segmentului (BC) ;

- b) $(AF) = (DP)$;
 c) $\widehat{APB} = \widehat{DFC}$;
 d) $\widehat{PBE} = \widehat{FCE}$.

* * *

4. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și înălțimea AD , $D \in (BC)$. Fie (BE) bisectoarea unghiului B . Dacă $AD \cap BE = \{T\}$, $TE = 6$ cm și $DT = 3$ cm, calculați măsura unghiului C .

Vasile Șerdean, Camelia Măgdaș

Clasa a VII-a

1. a) Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătați că

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc.$$

b) Utilizând eventual punctul a), demonstrați că:

$$(a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1) \geq 2^n, \text{ dacă } a_1 a_2 \dots a_n = 1.$$

* * *

2. Să se arate că

$$\frac{1}{671} + \frac{1}{672} + \dots + \frac{1}{2011} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2009 \cdot 2010 \cdot 2011}.$$

Vasile Șerdean

3. În triunghiul ABC se consideră punctul D pe segmentul (BC) . Fie E și F simetricile punctului D față de dreptele AB respectiv AC .

a) Demonstrați că $m(\widehat{EAF})$ este constantă oricare ar fi poziția punctului D pe latura (BC) .

b) Determinați poziția punctului D pe segmentul (BC) astfel încât perimetrul triunghiului AEF să fie minim.

c) Arătați că $EF < 2AD$.

d) Care este poziția punctului D pe (BC) astfel încât $AD \perp EF$?

Ioan Groza, Lucia Iepure

4. Se consideră punctul M în interiorul triunghiului echilateral ABC și P, L, K proiecțiile sale pe (AB) , (BC) , respectiv (AC) . Calculați aria triunghiului ABC știind că $AP = 8$, $BL = 12$ și $CK = 7$.

Vasile Șerdean, Gheorghe Lobonț

Clasa a VIII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 3a]$ și $y \in [0, 2b]$. Demonstrați că are loc inegalitatea:

$$(x - y)^2 + \left(\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2}\right)^2 \leq 13(a^2 + b^2).$$

Ștefania Mustea, Monica Fodor

2. a) Știind că $x^3 - 3xy^2 = 10$ și $y^3 - 3x^2y = 198$, calculați $x^2 + y^2$.

b) Să se determine cifra n din numărul $x = 1, n12$ care are proprietatea că $2d(x) + x = 2,488$, unde $d(x)$ notează distanța de la x la cel mai apropiat număr întreg față de x .

Vasile Șerdean, Dorel I. Duca

3. Cubul $ABCD A' B' C' D'$ are muchia de lungime a . Calculați:

a) distanța de la punctul B la dreapta $A'D$;

b) cosinusul unghiului format de planele $(O'AC)$ și $(O'AB)$ unde

$$\{O'\} = A'C' \cap B'D';$$

c) distanța de la punctul A la planul $(O'BC)$;

d) aria secțiunii determinată în cub de planul $(O'BC)$.

Monica Fodor, Ioan Groza

4. O piramidă triunghiulară $VABC$ are aria bazei ABC egală cu 16. Fețele laterale VAB , VAC , VBC au respectiv ariile 10, 10, 12 și fac același unghi cu planul bazei. Să se calculeze volumul piramidei $VABC$.

Vasile Șerdean, Cristian Pop

Clasa a IX-a

1. Fie $n \geq 1$ un număr natural.

a) Arătați că restul împărțirii lui $4^{4 \cdot 5^{n-1}}$ la 5^n este 1.

b) Arătați că dacă numărul natural $m \geq 1$ are proprietatea că restul împărțirii lui m^5 la 5^n este 1, atunci restul împărțirii lui m la 5^{n-1} este 1.

Dorel I. Duca

2. Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor \widehat{A} , \widehat{B} respectiv \widehat{C} se intersectează două câte două în punctele A' , B' respectiv C' . (A și A' sunt separate de dreapta BC , B și B' sunt separate de dreapta CA , C și

Capitolul 2

Soluții

2.1 Ediția a XI-a (6-7 mai 2011)

Clasa a IV-a

1. Aflați diferența dintre numerele naturale a și b știind că ele verifică egalitățile

$$[(4 + a : 3) : 12 + 5] \cdot 4 - 26 = 42$$

$$[(b + 7) : 25 - 8] \cdot 8 + 5 = 37.$$

Gheorghe Lobonț

Soluție. Prima egalitate devine $[(4 + a : 3) : 12 + 5] \cdot 4 = 42 + 26$ sau $[(4 + a : 3) : 12 + 5] = 68 : 4$ adică $(4 + a : 3) : 12 = 17 - 5$ deci $4 + a : 3 = 12 \cdot 12$. Urmează că $a = 420$.

A doua egalitate devine $[(b + 7) : 25 - 8] \cdot 8 = 32 \Leftrightarrow (b + 7) : 25 - 8 = 4$

$$\Leftrightarrow (b + 7) : 25 = 12 \Leftrightarrow b + 7 = 300 \Leftrightarrow b = 293.$$

Urmează că $a - b = 420 - 293 = 127$.

2. Suma a două numere naturale este 225. Dacă pe primul număr îl înmulțim cu 2, iar pe al doilea îl împărțim la 2, obținem numere egale. Care sunt numerele?

Eugenia Miron

Soluție. Avem $a + b = 225$ și $4a = b$. Deci $5a = 225$. Așadar $a = 45$ și $b = 180$.

3. În urmă cu 7 ani, suma vârstelor fraților Mariei era de 9 ani. Acum suma vârstelor fraților ei este 37 ani. Câți frați are Maria?

Ioan Groza

Soluție. $37 - 9 = 28$ reprezintă numărul fraților înmulțit cu 7 ani. Atunci $28 : 7 = 4$ este numărul fraților Mariei.

4. La concursul de matematică și informatică „Marian Țarină”, ediția a X-a, au participat 272 elevi, dintre care 258 au rezolvat prima problemă, 250 au rezolvat a doua problemă, 163 au rezolvat a treia problemă și 149 au rezolvat a patra problemă. Arătați că cel puțin patru elevi au rezolvat toate problemele.

Vasile Șerdean

Soluție. Prima problemă nu au rezolvat-o: $272 - 248 = 14$ elevi.

A doua problemă nu au rezolvat-o: $272 - 250 = 22$ elevi.

A treia problemă nu au rezolvat-o: $272 - 163 = 109$ elevi.

A patra problemă nu au rezolvat-o: $272 - 149 = 123$ elevi.

Avem nerezolvate: $14 + 22 + 109 + 123 = 268$ probleme.

Cum au fost 272 elevi, rezultă că cel puțin 4 elevi au rezolvat toate problemele.

Clasa a V-a

1. Determinați toate numerele naturale \overline{abcd} cu proprietatea că

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 36 \quad \text{și} \quad \overline{dc} + \overline{cd} = 33.$$

Monica Fodor

Soluție. Avem $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b) \Rightarrow 9(a - b) = 36 \Rightarrow a - b = 4 \Rightarrow a = b + 4$
și $\overline{dc} + \overline{cd} = 11(d + c) \Rightarrow 11(d + c) = 33 \Rightarrow d + c = 3 \Rightarrow d = 3 - c$.

Deoarece $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 9\}$ urmează că:

Pentru $b \in \{5, 4, 3, 2, 1\} \Rightarrow a \in \{9, 8, 7, 6, 5\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{95, 84, 73, 62, 51\}$.

Pentru $c \in \{1, 2\} \Rightarrow d \in \{2, 1\} \Rightarrow \overline{cd} \in \{12, 21\}$.

Concluzie: $\overline{abcd} \in \{9512, 9521, 8412, 8421, 7312, 7321, 6212, 6221, 5112, 5121\}$.

2. Fie numărul $A = 91992999399994 \dots 999 \dots 92006$.

a) Calculați suma cifrelor numărului A .

b) Care este cifra de pe locul 108?

c) Determinați câte cifre de 9 conține numărul A .

Ioan Groza, Cristian Pop

Soluție. a) Avem

$$9 + 1 = 10, \quad 2 \cdot 9 + 2 = 20, \quad 3 \cdot 9 + 3 = 30, \dots, \quad 9 \cdot 2006 + 2006 = 20060$$

și atunci $S = 10 + 20 + \dots + 20060 = 2007 \cdot 10030 = 20130210$.

b) Deoarece 91 are 2 cifre, 992 are 3 cifre, \dots , 99...99 are 10 cifre, 99...910 are 12 cifre, 99...911 are 13 cifre, 99...912 are 14 cifre, 99...913 are 15 cifre.

Cum $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13 + 14 + 15 = 108$ urmează că cifra de pe locul 108 este 3.

c) Numărul A conține $1 + 2 + 3 + \dots + 2006 = 1003 \cdot 2007$ cifre.

3. *Suma a trei numere naturale este 349. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 4 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 7 și restul 4. Să se afle numerele.*

Gheorghe Lobonț, Lucia Iepure

Soluție. Fie a, b, c cele 3 numere. Atunci $a + b + c = 349$, $a = 4b + 5$, $b = 7c + 4$. Rezultă $c = 9$, $b = 67$, $a = 273$.

4. *Se consideră 10 numere naturale nenule (nu neapărat diferite) și calculăm toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere și obținem: 83, 84, 85, ..., 90, 91 (sumele care se repetă le scriem o singură dată). Aflați cele 10 numere.*

Vasile Șerdean

Soluție. Fie x_1, x_2, \dots, x_{10} numerele, cu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{10}$ și

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_{10}.$$

Sumele obținute sunt printre numerele $S - x_1, S - x_2, \dots, S - x_{10}$ care au suma $10S - (x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) = 10S - S = 9S$. Fiindcă sunt numai nouă sume (83, 84, ..., 91) rezultă că printre numerele $S - x_1, S - x_2, \dots, S - x_{10}$ se află două numere identice. Fie acestea x . Atunci

$$x + 83 + 84 + \dots + 91 = 9S \Rightarrow x + 87 \cdot 9 = 9S \Rightarrow x = 9(S - 87).$$

Sumele fiind de la 83 la 91 $\Rightarrow S = 97$. Atunci $x = 9(97 - 87) = 9 \cdot 10 = 90$ și deci numerele sunt: $97 - 83, 97 - 84, \dots, 97 - 90, 97 - 90, 97 - 91$. Așadar cele 10 numere sunt 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 7, 6.

Clasa a VI-a

1. *Fie x, y, z trei numere întregi pozitive cu proprietatea că primele două sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar ultimele două sunt invers proporționale cu $1/2$ și $1/5$. Studiați dacă produsul lor este cub perfect, când suma numerelor este 100.*

Monica Fodor, Ancuța Nechita

Soluție. Avem $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și $y \cdot \frac{1}{2} = z \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{25} = 4$

$$\Rightarrow x \cdot y \cdot z = 4^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 4 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 = (2^3)^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Concluzie: nu este cub perfect.

2. a) Fie

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2011}, \\ y &= 1 + 3 + 3^3 + \dots + 3^{2011}, \\ z &= 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2011}. \end{aligned}$$

Scrieți în ordine crescătoare numerele $9z + 1$, $(2y + 1)^2$ și $(x + 1)^3$.

b) Să se arate că fracția $\frac{5c+8}{3c+5}$ este ireductibilă oricare ar fi $c \in \mathbb{N}$.

Vasile Șerdean, Monica Fodor

Soluție. a) Avem $x = 2^{2012} - 1 \Rightarrow (1+x)^3 = (2^3)^{2012} = 8^{2012}$. Cum

$$y = \frac{3^{2012} - 1}{2} \Rightarrow (2y+1)^2 = (3^2)^{2012} = 9^{2012}.$$

Deoarece $z = \frac{10^{2012} - 1}{9}$ rezultă $1 + 9z = 10^{2012}$.

Concluzie: $8^{2012} < 9^{2012} < 10^{2012} \Rightarrow x < y < z$.

b) Fie d divizor comun al numărătorului și al numitorului $\Rightarrow d \mid 5c + 8$
 $\Rightarrow d \mid 3(5c + 8); d \mid 3c + 5 \Rightarrow d \mid 5(3c + 5) \Rightarrow d \mid 3(5c + 8) - 5(3c + 5) \Rightarrow d \mid 1$.
 Concluzie: Frația este ireductibilă.

3. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine), astfel încât $(AB) = (CB) = (CD)$. Fie E un punct exterior dreptei d , astfel încât $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$. În triunghiul EDA se construiesc medianele (AF) ($F \in (ED)$) și (DP) ($P \in (AE)$). Să se arate că:

- E aparține mediatoarei segmentului (BC) ;
- $(AF) = (DP)$;
- $\widehat{APB} = \widehat{DFC}$;
- $\widehat{PBE} = \widehat{FCE}$.

* * *

Soluție. a) Din $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$ deducem că $\triangle EAD$ este isoscel.

Atunci mediana (EM) ($M \in AD$) este și mediatoare și înălțime și bisectoare, deci $EM \perp AD$, $(AM) = (DM)$. Acum din faptul că $(AB) = (CD)$, deducem că